Single angle polyhedra

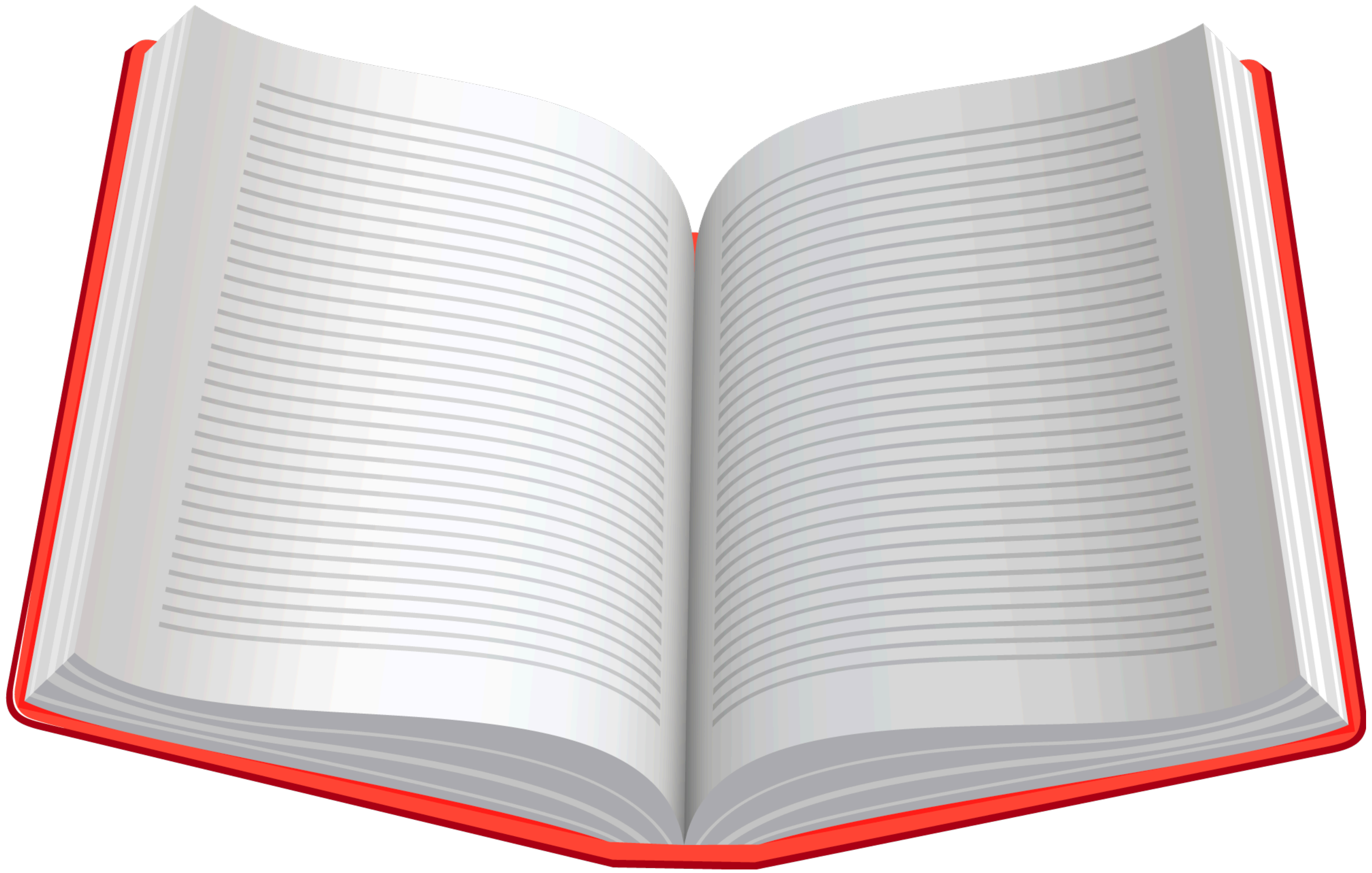
or,

polyhedra whose faces meet at right-angles except on one edge

Robin Houston, Big MathsJam 2022

What’s a dihedral angle?

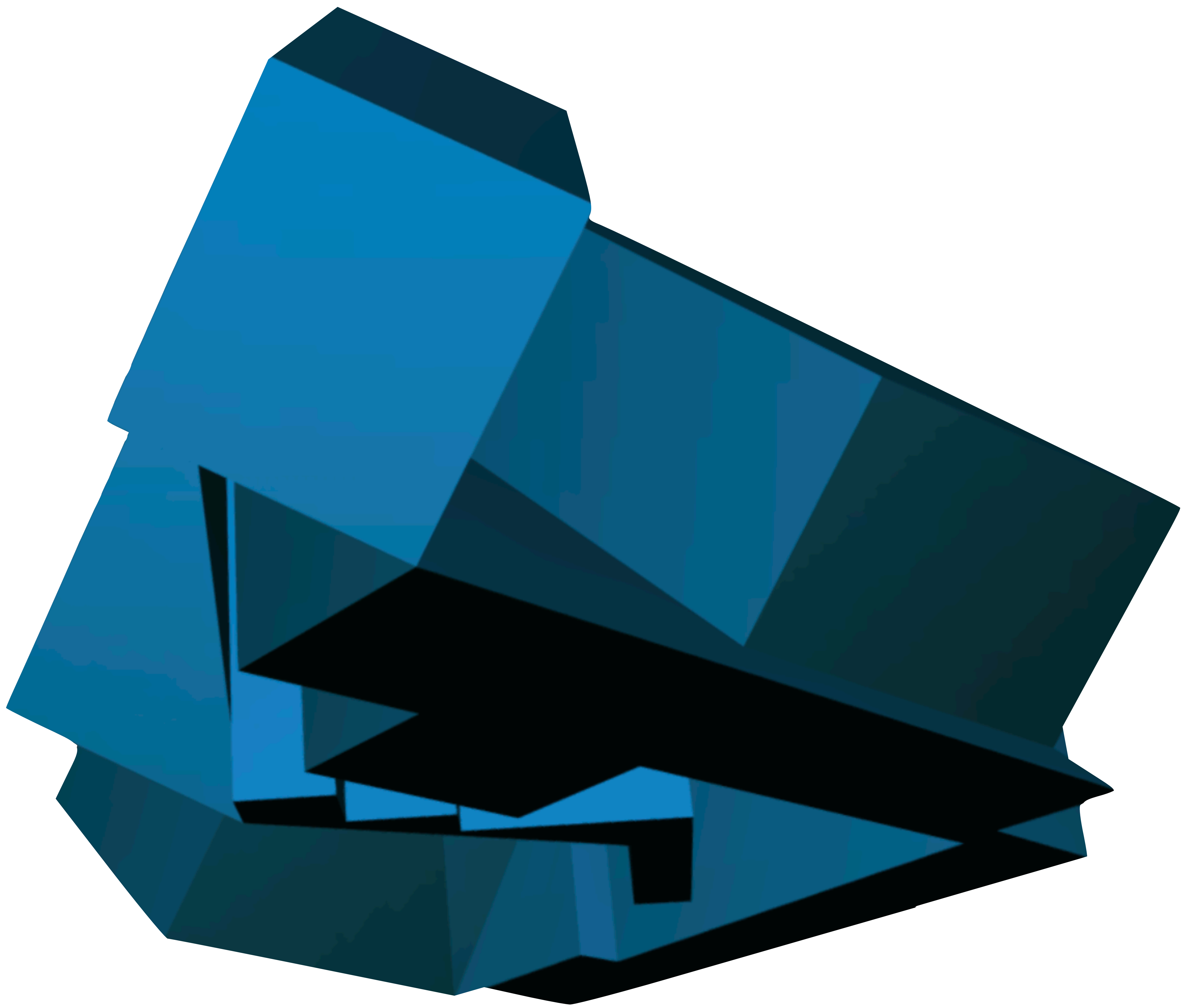
at an edge of a polyhedron



Sydler’s polyhedron

Just look at it

- J-P Sydler, 1965
- All the dihedral angles are right-angles, apart from one which is 45°
- Can you see which one?



Chapitre 1. Sur les polyèdres à dièdres droits

1.1. *Il existe un polyèdre équivalent à un cube, ayant un dièdre égal à $\frac{\pi}{4}$, tous les autres dièdres étant droits.*

En effet, considérons un prisme droit $ABEFGH$, dont les bases GAE et HBF sont des triangles isocèles rectangles en G et H. Coupons ce prisme par le plan EJB perpendiculaire au plan $ABEF$, J étant l'intersection avec GH. Le polyèdre $EGJAB$ est équivalent à un cube. K et L étant les milieux de EF et de AB (JK et JL étant donc respectivement perpendiculaires à JAB et à JEF), M le milieu de KL, menons encore par J le plan perpendiculaire à EL, qui coupe EL en D et KB en C. Le polyèdre $GJEABCD$ a pour dièdres: $\frac{\pi}{4}$ le long de AB, α le long de BC, $\pi - \alpha$ le long de ED, $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les autres arêtes. Les tétraèdres $JMDE$ et $JMCB$ étant identiques, le polyèdre est équivalent au polyèdre $EGJAB$, donc à un cube (figure 1).

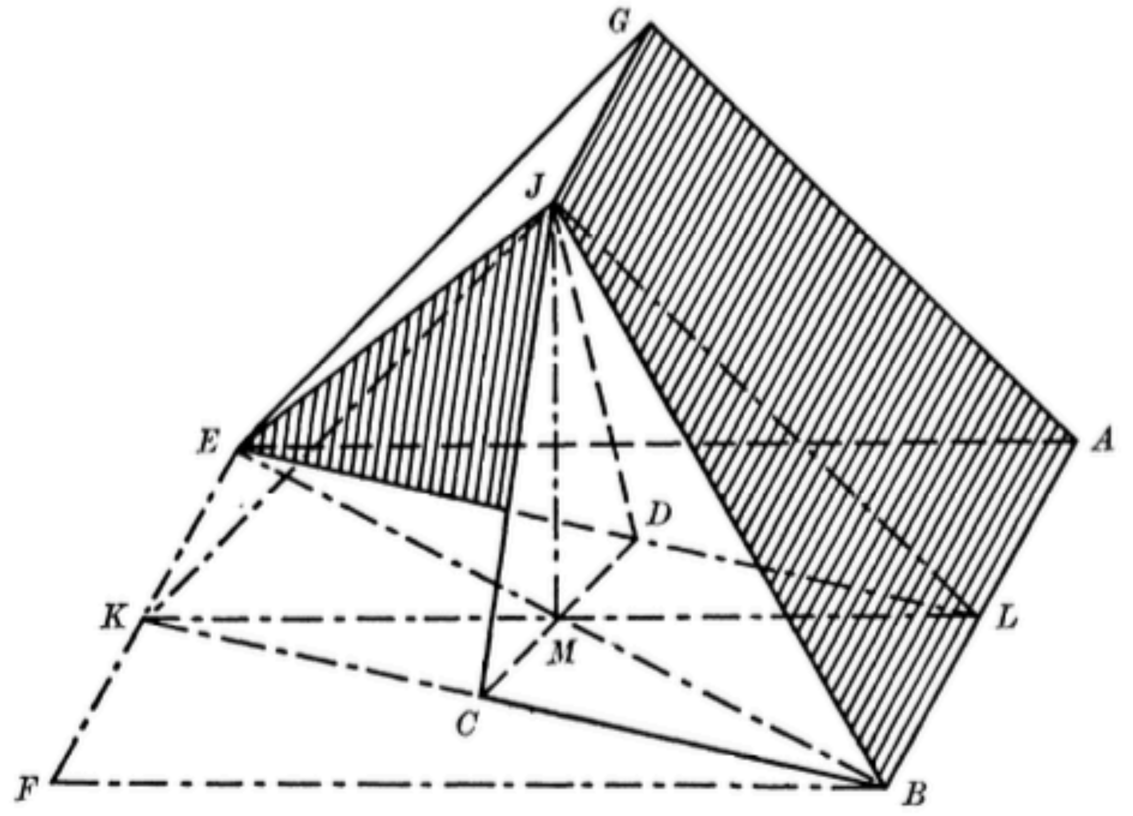


Figure 1

Construisons le polyèdre Q suivant (non équivalent à un cube en général): Soit $TCPB$ un carré et soit S un point de la normale à TCB en T tel que l'angle TSP soit égal à α. Menons encore par BC le plan perpendiculaire à SP, qui coupe SP en A, et soit β l'angle BAC. Le polyèdre $SABCT$ a donc pour dièdres: $\pi - \alpha$ le long de BC, β le long de SA, les autres étant droits (figure 2).

Ajoutons au polyèdre $EGJABCD$ le long de l'arête BC un polyèdre semblable à Q, l'arête VW correspondant à SA étant perpendiculaire au plan

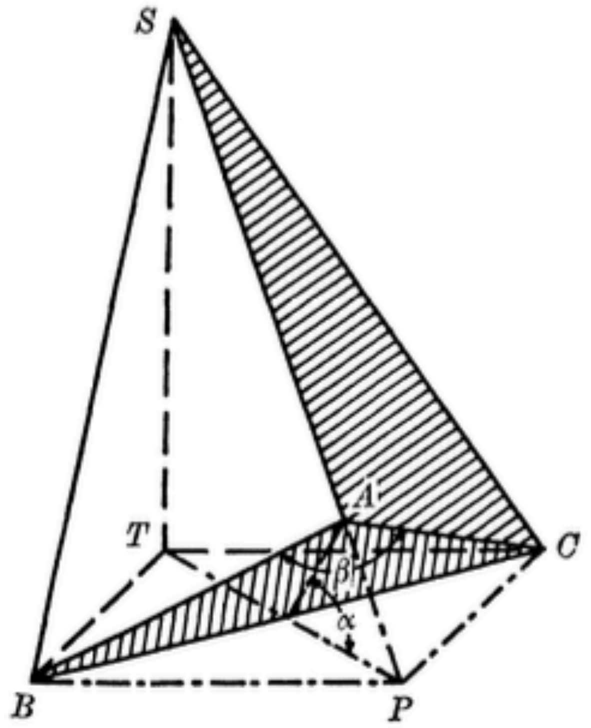


Figure 2

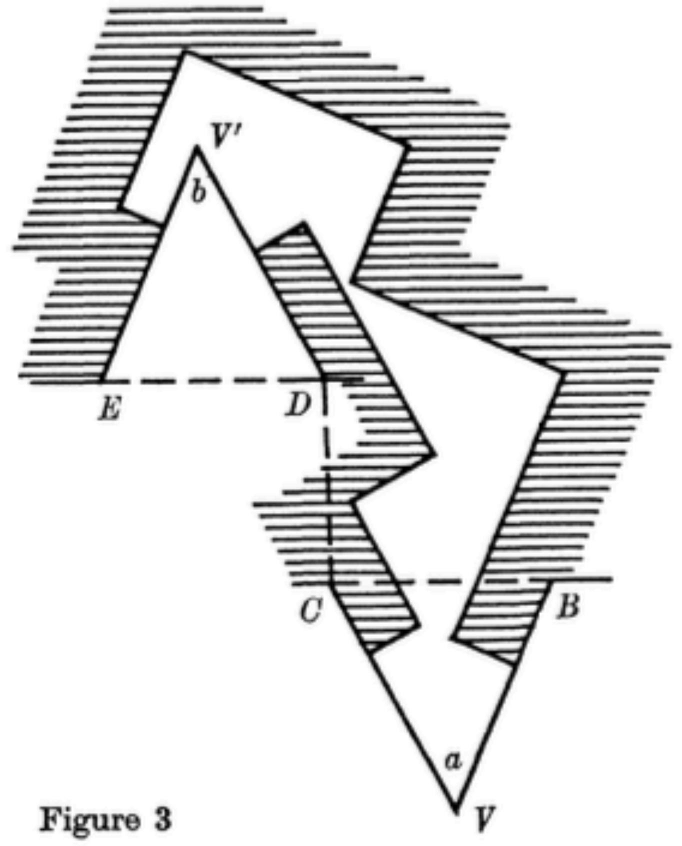


Figure 3

EAB et retranchons-en un autre le long de ED, l'arête correspondante de SA étant $V'W'$. Pour que la construction soit possible, il faudra peut-être ajouter ou enlever des prismes au polyèdre considéré.

Nous obtenons ainsi un nouveau polyèdre équivalent à un cube et dont tous les dièdres sont droits, sauf les dièdres le long de VW et $V'W'$, lesquels sont égaux à β et $2\pi - \beta$, les faces étant parallèles et les arêtes comprises entre deux plans parallèles. On peut dès lors enlever du polyèdre un prisme vertical ayant un dièdre $2\pi - \beta$ le long de $V'W'$, un dièdre β le long de VW', les autres étant droits (figure 3). Le polyèdre restant est alors le polyèdre cherché.

1.2. En ajoutant un tel polyèdre le long des arêtes de dièdres $\frac{\pi}{4}$, on peut transformer un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de $\frac{\pi}{4}$ en un polyèdre équivalent dont tous les dièdres sont droits. Par conséquent, d'après un théorème que nous avons déjà établi (cf. introduction 0.3.):

Si un polyèdre vérifie les conditions de Dehn, *il est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres sont droits.*

The Sydler π/4 polyhedron

Getting a 3d print

Order a 3d print on Shapeways here or download the obj or stl file.

Introduction

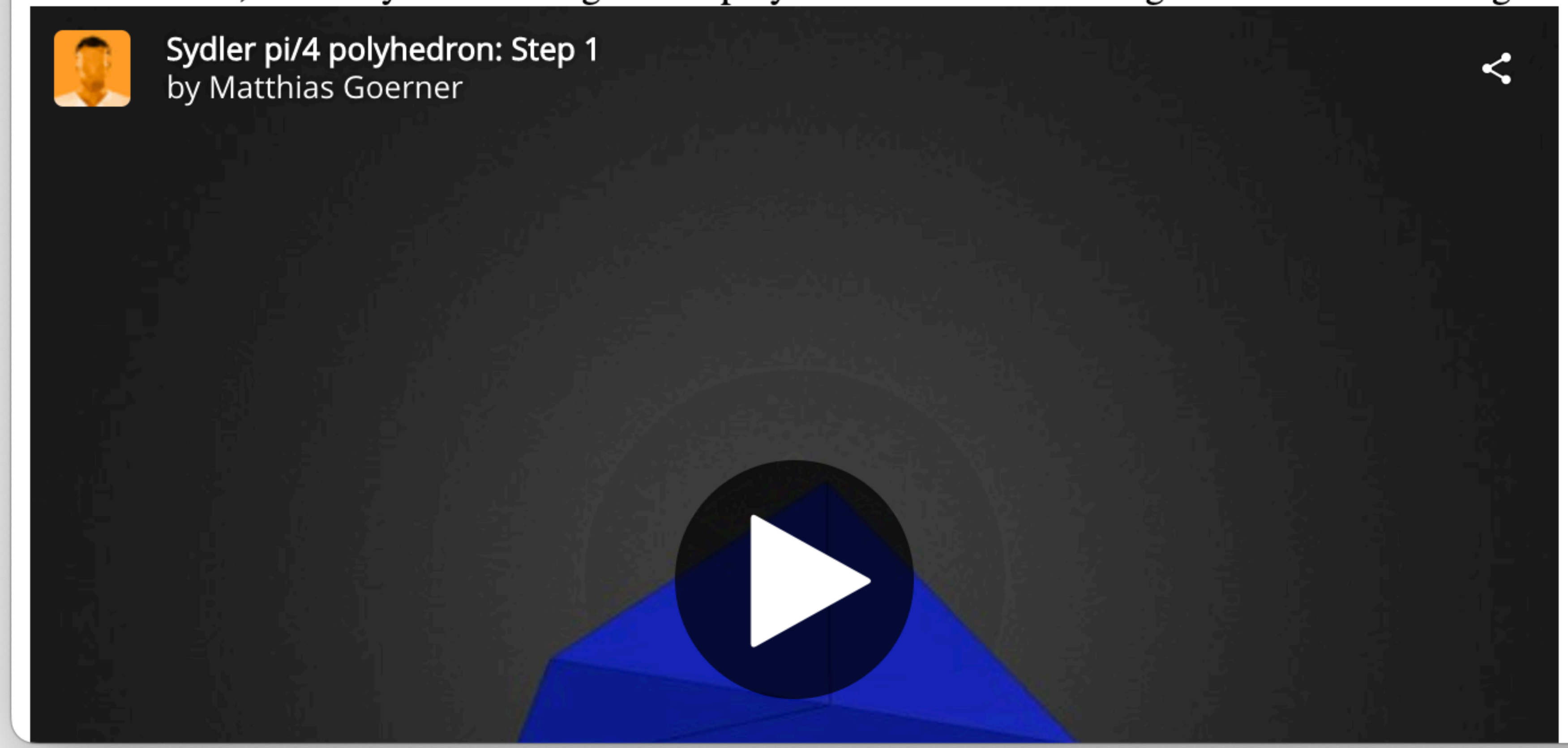
We follow the steps by Jean-Pierre Sydler to construct a polyhedron that is scissors congruent to a cube and where all dihedral angles are right except for one which is 45 degrees.

This polyhedron is used in Sydler's proof of Sydler's Theorem which is related to Hilbert's third problem and states that every polyhedron is determined by its volume and Dehn invariant up to scissors congruence.

References: J.-P. Sydler, "Conditions necessaires et suffisantes pour l'equivalence des polyedres de l'espace euclidien a trois dimensions", Commentarii mathematici Helvetici (1965/66) Volume: 40, page 43-80

Step 1

We start with a prism over an isosceles right triangle. This prism is scissors-congruent to a cube but has two $\pi/4$ dihedral angles (labeled 1 and 2). After this step, we are left with only one edge with angle $\pi/4$. However, we introduced two angles ζ and π-ζ (labeled 3, respectively, 4).
From now on, we always call the angles of a polyhedron which are not right or $\pi/4$ the **extra** angles.



The pi/4 polyhedron

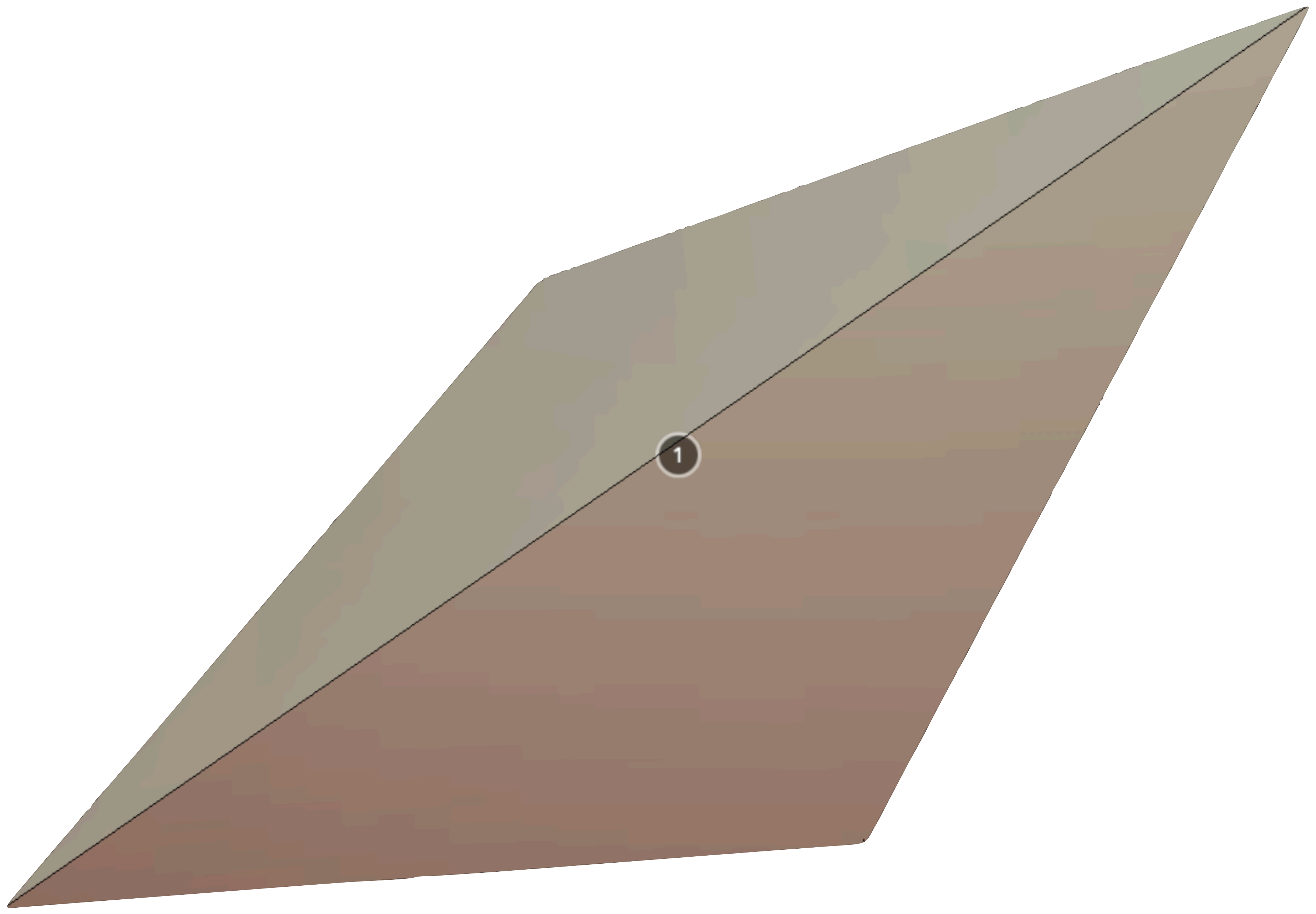
Henry Segerman
71.2K subscribers

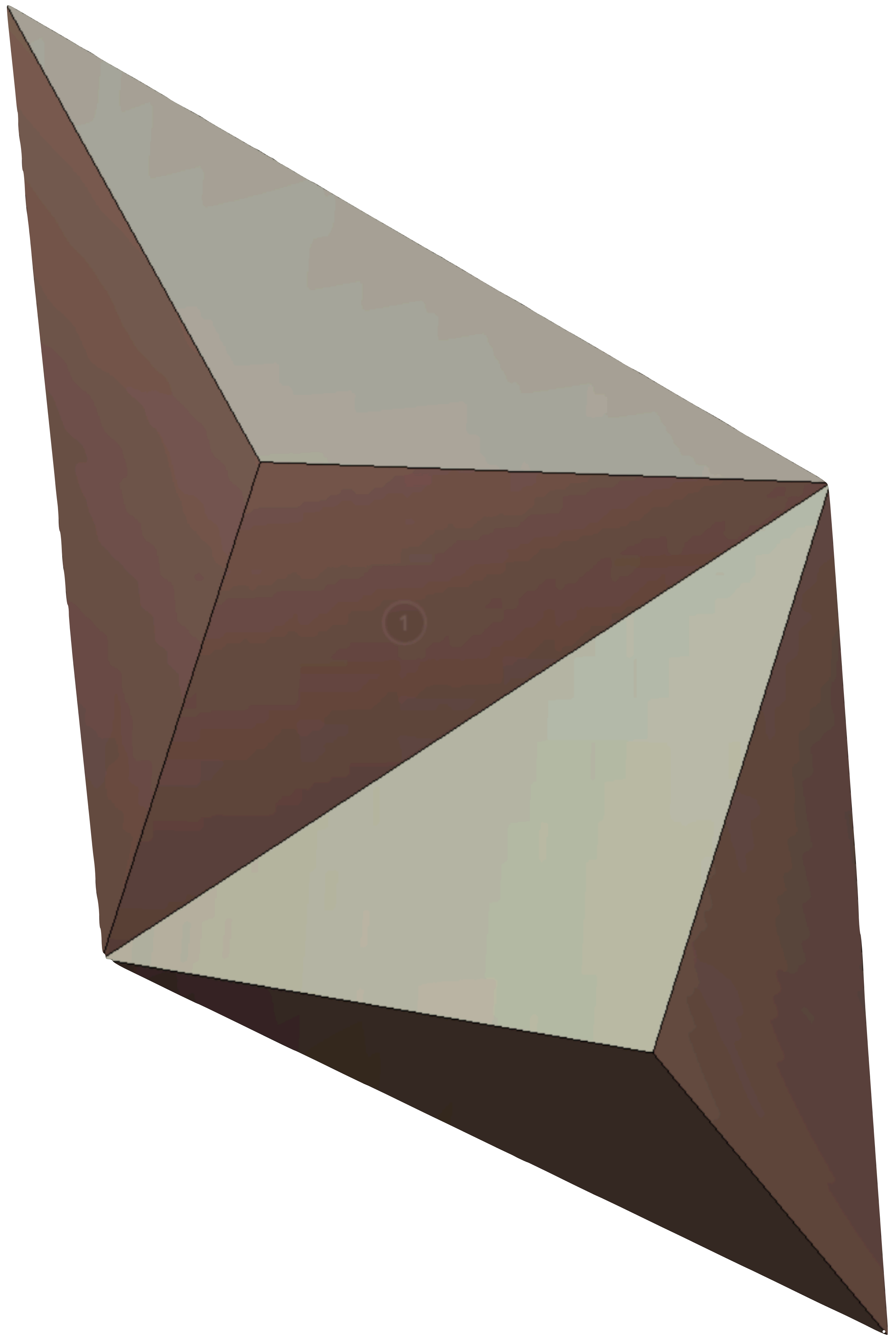
Subscribed

3.1K

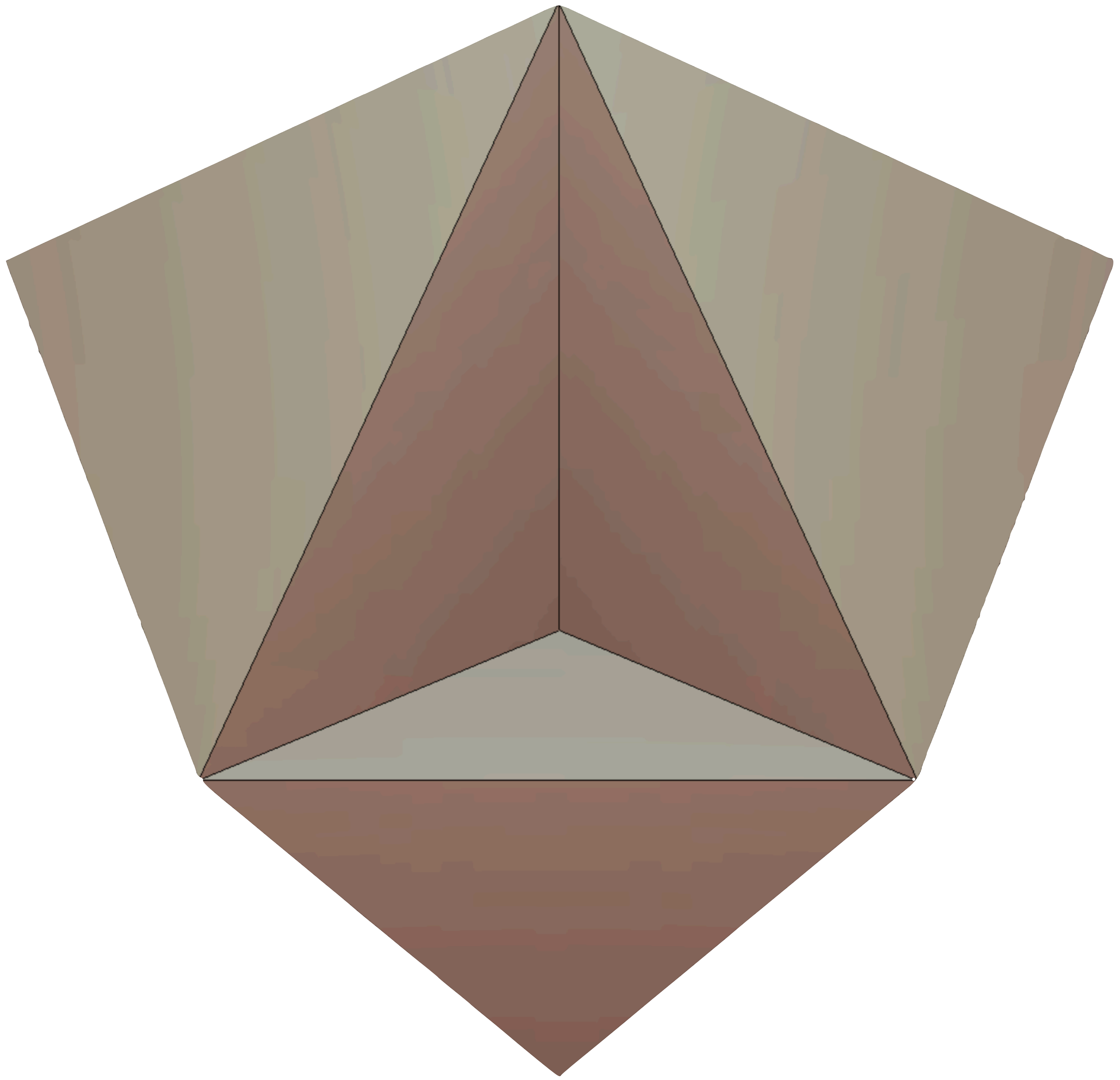
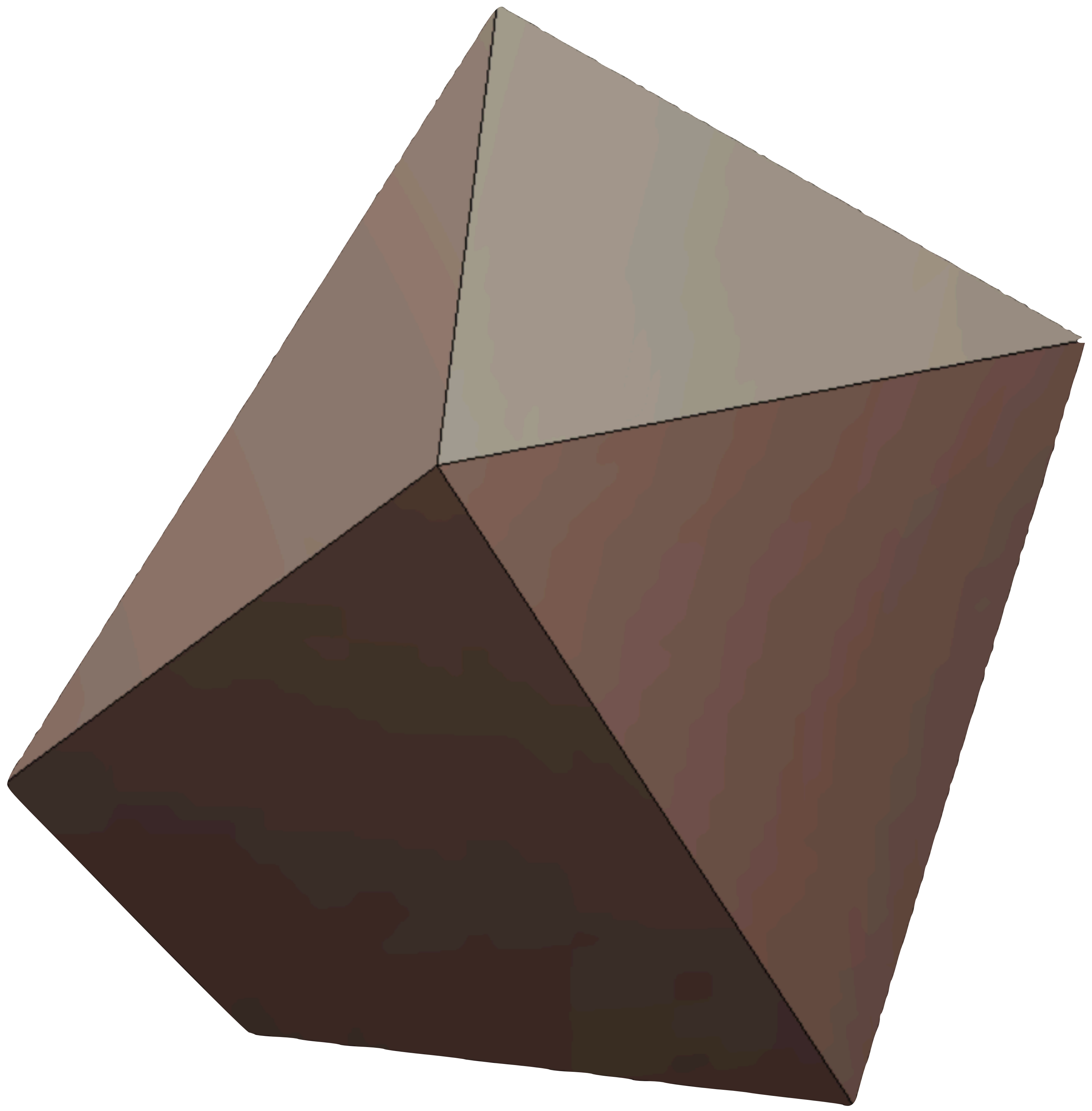
Share

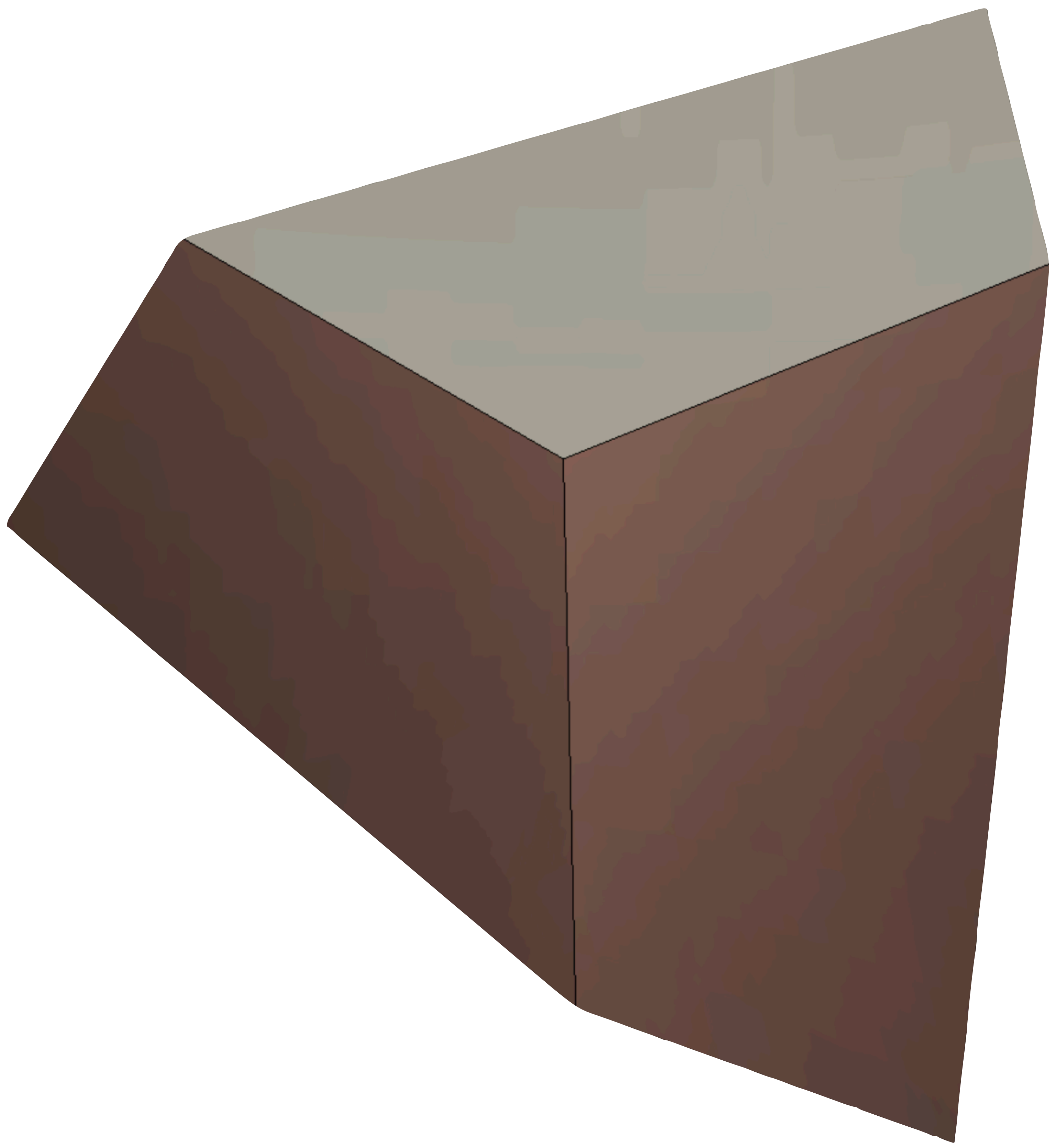
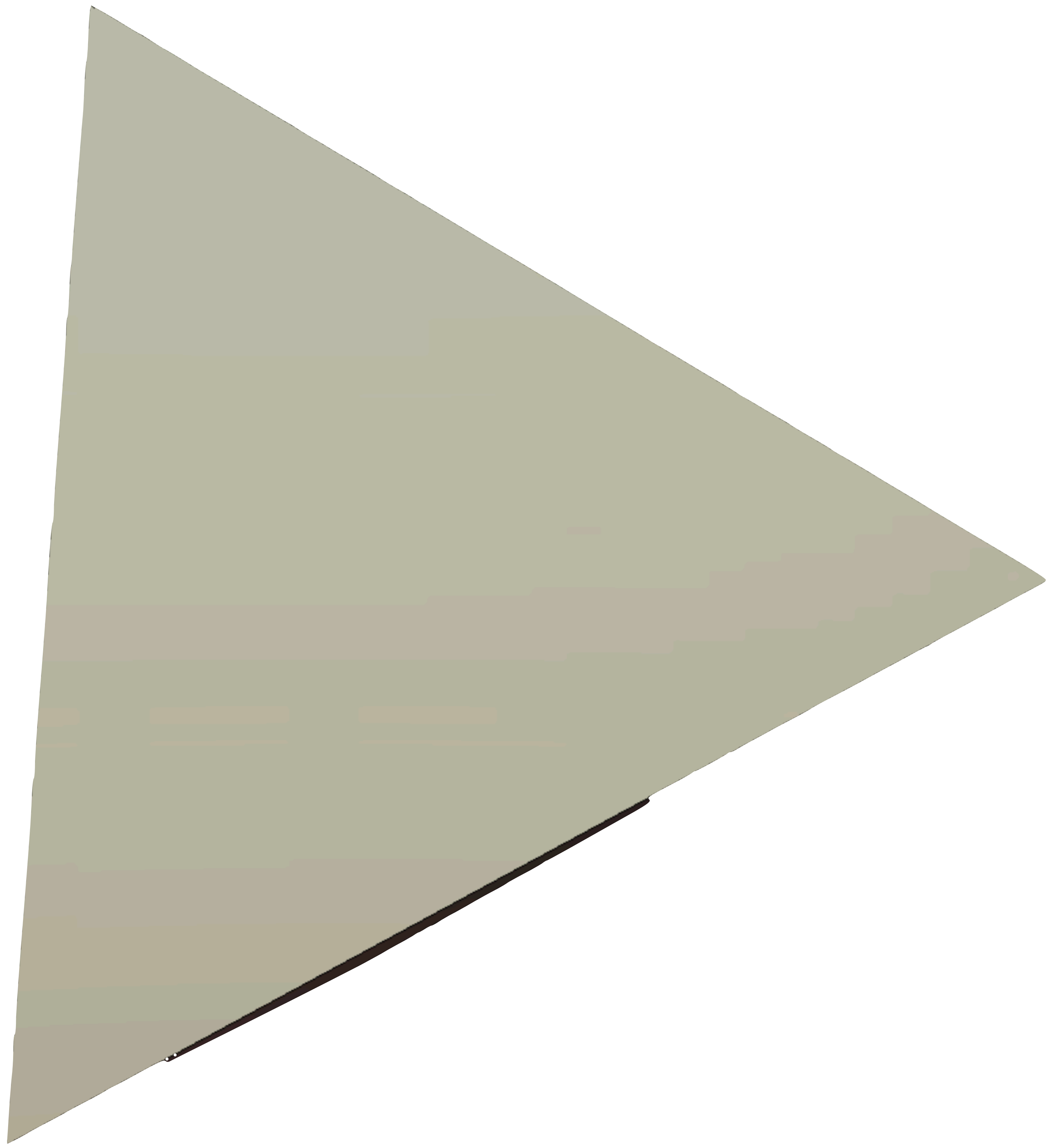
Download

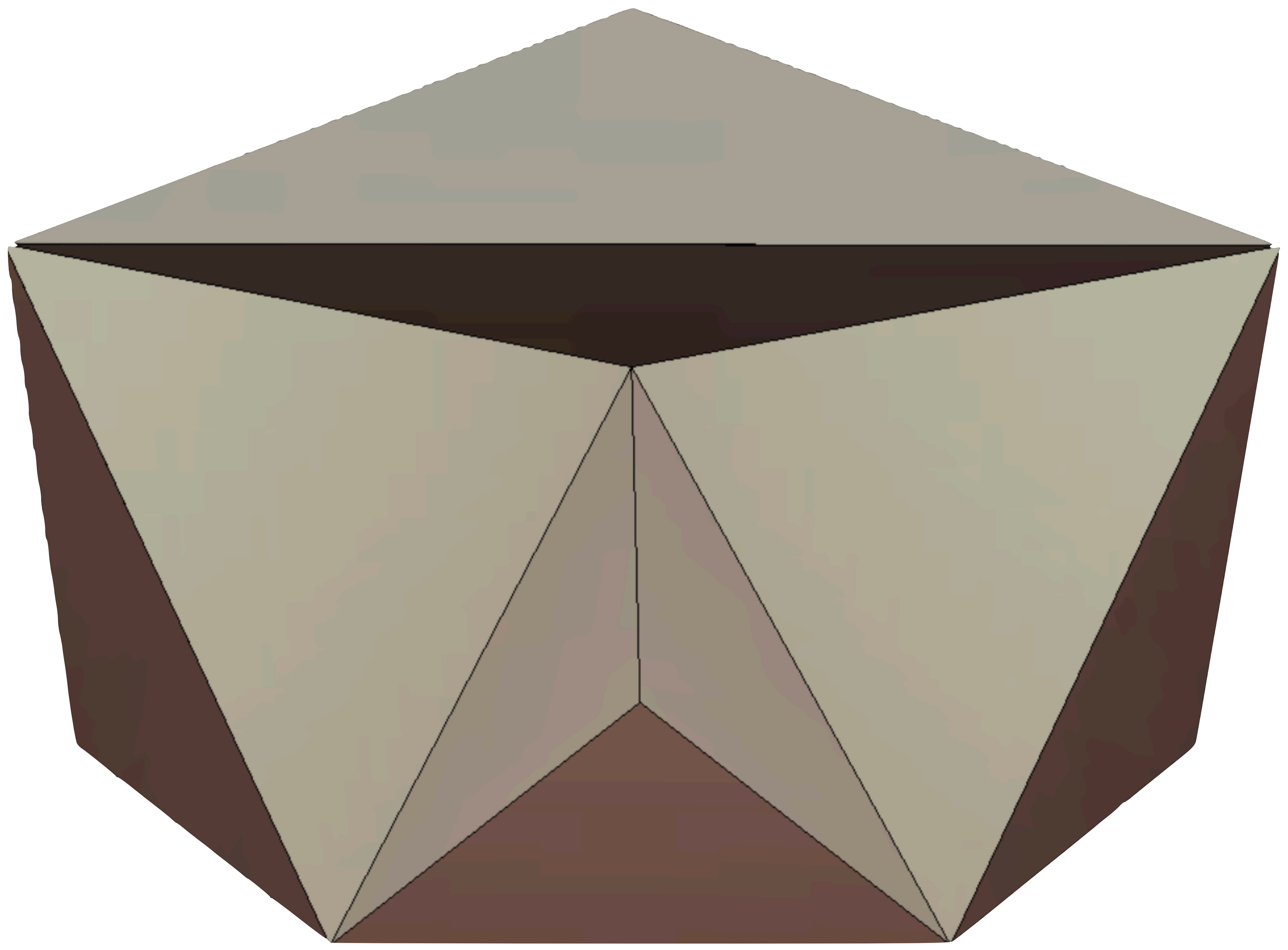


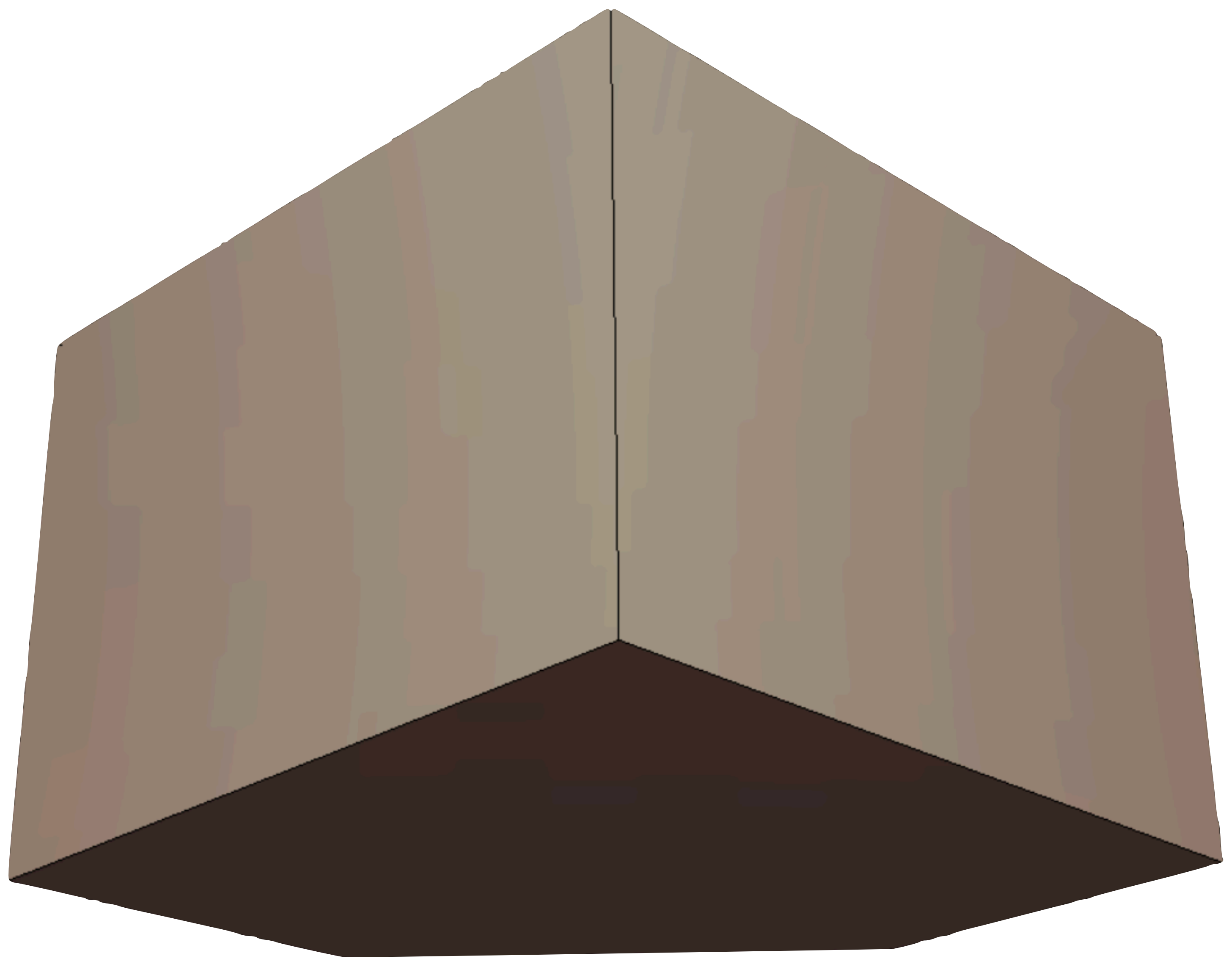


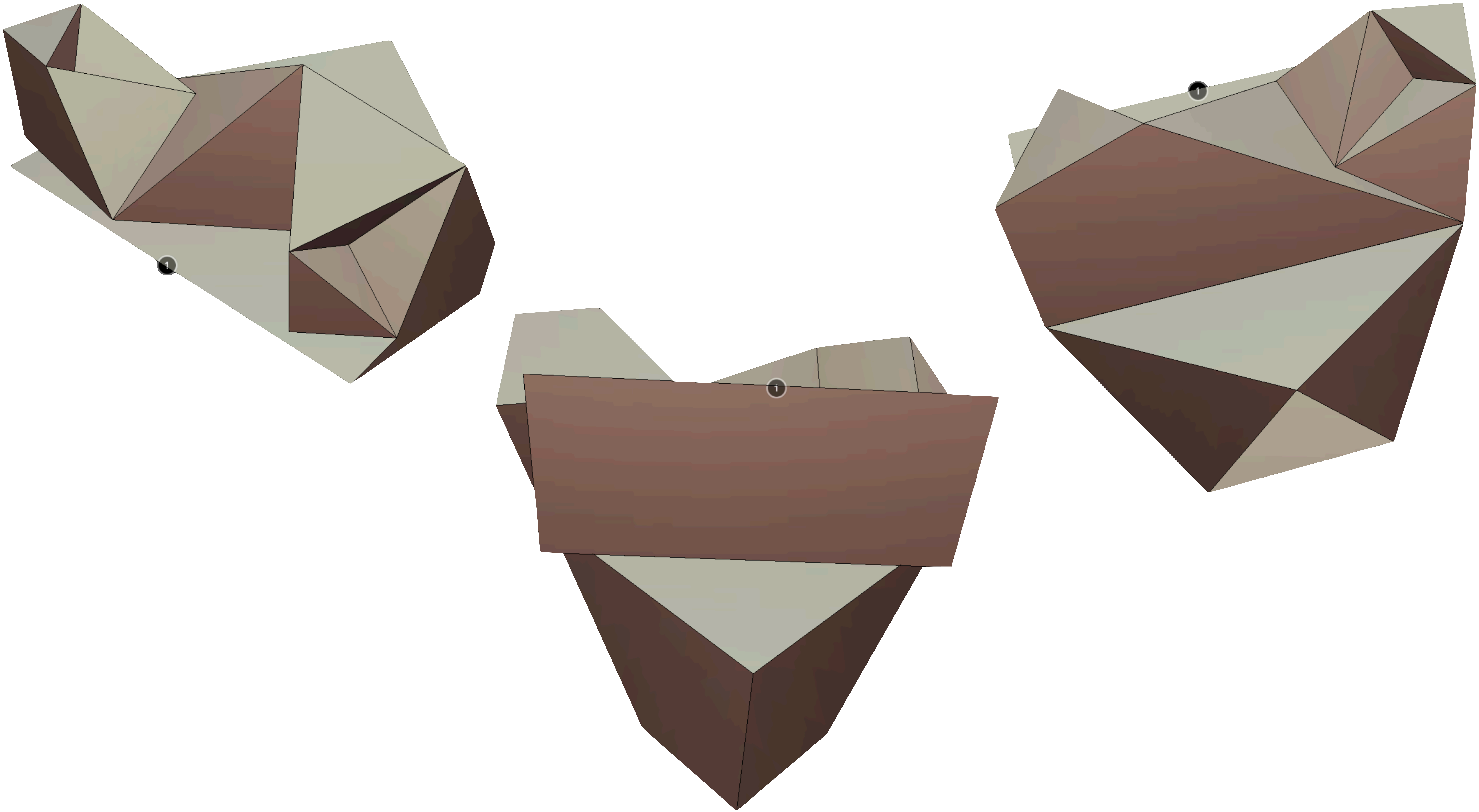
arccos(-1/3) ≈ 109.5°







You should follow me on Mathstodon

@robinhouston@mathstodon.xyz